# Markov性をもつ多次元径数Gaussian Processesについて (多重マルコフ性と予測理論への応用)

AUTHOR(S):

井上, 和行

数理解析研究所講究録
151巻 1972年 68-75



# Markov性をもつ多次元径数 Gaussian processesについて

信州大　理　井上和行

## §1. 序

確率空間$(\Omega, \Sigma, P)$上のGaussian process $X_t$, $t \in T$, $EX_t \equiv 0$, $EX_tX_s \equiv R(t,s)$, が与えられた時covariance $R(t,s)$を再生核としてもつreproducing kernel Hilbert space (r.k.h.s.) $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ がきまる。　逆に再生核$R(t,s)$をもつ r.k.h.s. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ に対して上のようなGaussian process $X_t$, $t \in T$ が分布の意味で一意的にきまる。　ここではTをd次元Euclidian space$\mathbb{R}^d$の中の滑らかな$(d-1)$次元超曲面で囲まれた有界領域とし，Gaussian process $X_t$, $t \in T$のMarkov性をP.L.[4]と同じ意味で$\mathcal{H}$の閉部分空間のことばを用いて定義する。

まず$\{X_t, t \in D\}$（Dは開集合，$\subseteq T$）で張られる$L^2(\Omega, P)$の閉部分空間をH(D)とする時，写像

$$\Phi : H(T) \ni X \longrightarrow u(s) \equiv EXX_s \in \mathcal{H}(T) = \mathcal{H}$$

はunitary写像である。　$\mathcal{H}$の閉部分空間$\Phi[H(D)]$を$\mathcal{H}(D)$と

書く。 $\{D_-, \Gamma, D_+\}$ は滑らかな $(d-1)$ 次元超曲面で囲まれた開集合 $D_-$ ( $\subseteq T$), その境界 $\Gamma$, および $D_+ = T \setminus (D_- \cup \Gamma)$ の組を表わすものとする。この時次のような $\mathcal{H}$ の閉部分空間を導入する。 $\mathcal{H}(D_-)$ ("過去"), $\mathcal{H}(D_+)$ ("未来") に対して $\mathcal{H}(D_+)$ の $\mathcal{H}(D_-)$ への正射影を $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$ と書く。 $\mathcal{H}(\Gamma_\pm) = \bigcap_{O\text{は開集合}, O \supseteq \Gamma} \mathcal{H}(D_\pm \cap O)$ とし特に $\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+)$ の時, $\mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma_-)$ ("現在") と書く。一般には, $\mathcal{H}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(D_-) \cap \mathcal{H}(D_+) \subseteq \mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(D_-)$ となる。

Definition.

Gaussian process $X_t$, $t \in T$ が "Markov性" をもつ。

$\Longleftrightarrow$

任意の組 $\{D_-, \Gamma, D_+\}$ に対して次の2条件がなりたつ。

(1) $\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = \mathcal{H}(\Gamma)$

(2) $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma)$ ∎

以下§2.では2p階一様強楕円型偏微分作用素Aに付随して定義されるGaussian processがMarkov性をもつことを述べる。Pitt[4]はこのprocessの"p重Markov性"および予測問題への応用について述べている。 §3.で我々は作用素AのDirichlet問題に関する議論をすることによりPitt[4]とは別の方向からMarkov性を証明する。 この方法はMolchan[3]が奇数次元径数Brown運動のMarkov性を示すのに用いたものである。§4.ではPitt[4]の結果に関連して若干の補足をする。

## §2. 仮定と結果

各整数$N \geqq 0$に対して$C_0^\infty(T)$（$T$に含まれるcompact supportをもつような無限回微分可能関数の全体）上の内積$(\cdot,\cdot)_N$を次式で与える。

$$(u,\ v)_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_T D^\alpha u(t) \overline{D^\alpha v(t)}\, dt, \quad \|u\|_N = (u,\ u)_N^{\frac{1}{2}}$$

ノルム$\|\cdot\|_N$に関する$C_0^\infty(T)$の$L^2(T)$の中での完備化を$H_0^N(T)$と書く。

<u>Assumptions.</u>

1. $A$は次の条件をみたす$2p$階形式的自己共役一様強楕円型偏微分作用素，$p \geqq [\frac{d}{2}]+1$，とする。

(1) $$Au = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(t) D^\beta u\right)$$

各$\alpha, \beta$ $(|\alpha|, |\beta| \leqq p)$に対して$a_{\alpha\beta}(t)$は$T$上の無限回微分可能な有界関数.

(2) $\exists\, C > 0$；　$(u,\ Au)_0 \geqq C \cdot \|u\|_p^2$　　for $\forall\, u \in C_0^\infty(T)$

2. $C_0^\infty(T)$上のもう一つの内積$\langle\cdot,\cdot\rangle$を次式で与える。

$$\langle u,\ v \rangle = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \int_T a_{\alpha\beta}(t) D^\alpha u(t) \overline{D^\beta v(t)}\, dt, \quad \|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ノルム$\|\cdot\|$に関する$C_0^\infty(T)$の完備化を$\mathcal{H}$と書く。 ∎

この時SobolevのLemmaとAronszajn[1]の理論を用いることにより容易に次のことが示される。：

(a) ノルム$\|\cdot\|$とノルム$\|\cdot\|_N$は同値であり従って集合として$\mathcal{H}$と$H_0^p(T)$は同一視できる。

(b) *Hilbert space* $\mathcal{H}$は再生核$R(t,s)$をもつr.k.h.s.である。

(c) $\mathcal{H}$の元はT上の$\mu$-Lipschitz連続関数。($0<\mu\leq 1$, $0<\mu<p-\frac{d}{2}$)

従って§1.のはじめに述べたように$\mathcal{H}$に対してGaussian process $X_t$, $t\in T$が一義的にきまるが,特にcovariance $R(t,s)$のLipschitz連続性により連続なsample pathsをもつようにmodifyできる。この報告では以下このprocess $X_t$, $t\in T$のみを考える事にする。

<u>Theorem.</u>

$X_t$, $t\in T$はMarkov性をもち, かつ $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)\subsetneqq\mathcal{H}(D_-)$ ▮

## §3. Theoremの証明

まずLemmaをいくつか用意する。

<u>Lemma. 1.</u>

任意に組$\{D_-,\ \Gamma,\ D_+\}$をとる。 この時,

$u\in H_0^p(T)$, かつ $u(t)=0$. for $\forall\, t\in D_\pm$

$\Longrightarrow$ $u$の$D_\mp$への制限$u_{D_\mp}$に対して, $u_{D_\mp}\in H_0^p(D_\mp)$ ▮

〈証明〉

$\gamma_{\Gamma_\pm}$を$D_\pm$に対応する境界Γへのtrace作用素とする。(定義は溝畑[2]による。) この時, 任意の$u\in H_0^p(T)$に対して,

$$\gamma_{\Gamma_+}(D^\alpha u_{D_+})=\gamma_{\Gamma_-}(D^\alpha u_{D_-})\qquad \text{for}\ \forall\alpha\ ;\ |\alpha|\leq p-1$$

実際, $\exists\{\varphi_n\}_{n\geq 1}\subseteq C_0^\infty(T)$ ;

$$\lim_{n\to\infty}\|D^\alpha\varphi_n-D^\alpha u\|_1=0\qquad \text{for}\ \forall\alpha\ ;\ |\alpha|\leq p-1$$

従ってtrace作用素の定義から，各$\alpha$ $(|\alpha| \leqq p-1)$に対して，

$$\gamma_{\Gamma_+}(D^\alpha u_{D_+}) = \gamma_{\Gamma_+}((D^\alpha u)_{D_+}) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ \gamma_{\Gamma_+}((D^\alpha \varphi_n)_{D_+})$$
$$= \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ \gamma_{\Gamma_-}((D^\alpha \varphi_n)_{D_-}) = \gamma_{\Gamma_-}((D^\alpha u)_{D_-})$$
$$= \gamma_{\Gamma_-}(D^\alpha u_{D_-})$$

今，特に$u$が$D_\pm$上で恒等的に0に等しければ

$$\gamma_{\Gamma_\pm}(D^\alpha u_{D_\pm}) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha ; |\alpha| \leq p-1$$

ゆえに，$\gamma_{\Gamma_\mp}(D^\alpha u_{D_\mp}) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha ; |\alpha| \leq p-1$

また，$\gamma_{\partial T}(D^\alpha u) = 0 \qquad \text{for } \forall\alpha : |\alpha| \leq p-1$

結局，$u_{D_\mp} \in H_0^p(D_\mp)$ ▮

<u>Lemma 2.</u>

任意に組$\{D_-, \Gamma, D_+\}$をとる。この時，

$u \in \mathcal{H}(D_\pm)$

$\Longleftrightarrow$ $u \in H_0^p(T)$，かつ，

$Au(t) = 0, \qquad \text{for } \forall t \in D_\mp$ ▮

〈証明〉

まず，$u \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}(D_\pm) \equiv \mathcal{H}^\perp(D_\pm) \Leftrightarrow u(t) = \langle u, R(\cdot, t)\rangle, \forall t \in \overline{D_\pm}$

即ち，$\mathcal{H}^\perp(D_\pm) = \{u \in \mathcal{H};\ u(t) = 0,\ \text{for } \forall t \in \overline{D_\pm}\}$に注意する。さて，任意の$u \in \mathcal{H}(D_\pm)$をとる。

$$\langle u, \varphi\rangle = 0, \qquad \text{for } \forall\varphi \in C_0^\infty(D_\mp) \subseteq \mathcal{H}^\perp(D_\pm)$$

部分積分により

$$\int_{D_\mp} u(t)\overline{A\varphi(t)}\,dt = 0, \qquad \text{for } \forall\varphi \in C_0^\infty(D_\mp)$$

一方Aは形式的自己共役だから、$D_\mp$上で$u$は$Au=0$のweak solutionである。従って強楕円型作用素のregularity theoremにより、$u\in C^\infty(D_\mp)$かつ$D_\mp$上で$u$は$Au=0$のclassical solutionである。

逆に$u\in H_0^p(T)$、かつ、各$t\in D_\mp$に対して$Au(t)=0$とする。この時$u\in \mathcal{H}$だから次のように直和分解できる。:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad \left( u^{(1)} \in \mathcal{H}(D_\pm),\ u^{(2)} \in \mathcal{H}^\perp(D_\pm) \right)$$

任意の$\varphi\in C_0^\infty(D_\mp)\subseteq \mathcal{H}^\perp(D_\pm)$に対して

$$\langle u^{(2)}, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle - \langle u^{(1)}, \varphi\rangle = 0$$

ゆえに前半と同様にして、$u^{(2)}$は$D_\mp$上で$Au^{(2)}=0$のclassical solutionである。一方Lemma 1により、$u^{(2)}_{D_\mp}\in H_0^p(D_\mp)$.
ゆえにAに対する$D_\mp$におけるDirichlet問題の解の一意性から、$u^{(2)}_{D_\mp}(t)\equiv 0$. 結局$u^{(2)}(t)\equiv 0$、従って、

$$u = u^{(1)} \in \mathcal{H}(D_\pm) \qquad \blacksquare$$

<u>Lemma 3.</u>

任意に組$\{D_-, \Gamma, D_+\}$をとる。この時

$$\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = \{ u\in H_0^p(T) ;\ Au(t)=0 \ \text{for}\ \forall t\in D_-\cup D_+\}$$

〈証明〉

$$\mathcal{H}(\Gamma_\pm) = \bigcap_{O\supseteq\Gamma:\,O\text{は開集合}} \mathcal{H}(D_\pm\cap O) = \bigcap_{O\supseteq\Gamma:\,O\text{は滑らかな超曲面で囲まれた開集合}} \mathcal{H}(D_\pm\cap O)$$

とできる。従ってLemma 2により、

$$\mathcal{H}(\Gamma_\pm) \subseteq \{ u\in H_0^p(T) ;\ Au(t)=0 \ \text{for}\ \forall t\in D_-\cup D_+\} \equiv S$$

$$S \subseteq \mathcal{H}(D_+\cap O)\cap \mathcal{H}(D_-\cap O), \quad \text{for}\ \forall O$$ 滑らかな超曲面で囲まれた開集合, $O \supset \Gamma$

これらをあわせて

$$\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = S$$ ∎

さてTheoremの証明にとりかかろう。まず $\mathcal{H}(\Gamma_-)=\mathcal{H}(\Gamma_+)=\mathcal{H}(\Gamma)$ はLemma 3で示された。次に, $\mathcal{H}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$ は明白だから $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(\Gamma)$ を示せばよい。任意の $\mathcal{U}_+ \in \mathcal{H}(D_+)$ をとり次のように直和分解する。:

$$\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}^{+/-} + \mathcal{U}_0, \quad (\mathcal{U}^{+/-} \in \mathcal{H}(D_-),\ \mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}^{\perp}(D_-))$$

Lemma 2.から

$$A\mathcal{U}^{+/-}(t) = 0, \qquad \text{for}\ \forall t \in D_+$$

また, $\mathcal{U}^{+/-}(t) = \mathcal{U}_+(t)$, for $\forall t \in D_-$, およびLemma 2から

$$A\mathcal{U}^{+/-}(t) = 0, \qquad \text{for}\ \forall t \in D_-$$

従って, $A\mathcal{U}^{+/-}(t) = 0$, for $\forall t \in D_- \cup D_+$

ゆえにLemma 3から, $\mathcal{U}^{+/-} \in \mathcal{H}(\Gamma)$, 結局 $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(\Gamma)$.

最後に $\mathcal{H}^{+/-}(\Gamma) \subsetneqq \mathcal{H}(D_-)$ を示そう。 $t_0 \in D_-$ を任意にとって固定する時, $R(\cdot, t_0) \in \mathcal{H}(D_-)$ であるが, $R(\cdot, t_0) \notin \mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$.

実際, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(T)$ に対して

$$\langle \varphi, R(\cdot, t_0)\rangle = \varphi(t_0),$$

即ち, $AR(\cdot, t_0) = \delta(t - t_0)$ となり $R(\cdot, t_0) \notin \mathcal{H}(\Gamma) \equiv \mathcal{H}^{+/-}(\Gamma)$ ∎

## §4. 補 足

(a)我々はLemma 2を用いてMarkov性を証明したが，Pitt [4]はMarkov性（p重Markov性）の結果としてLemma 2の内容を導いている。

(b)我々の考察したGaussian process $X_t$, $t \in T$に対してLemma 2を用いて容易に，$\mathcal{H}(D_t) = \bigcap_{O\text{は開集合}\supseteq \overline{D_t}} \mathcal{H}(O)$ を示すことができる。従ってこの式の右辺で“過去”および“未来”を定義しても同じ結果を得る。

(c) Lemma 1における超曲面$\Gamma$の滑らかさは$C^2$-クラスとすれば十分である。（溝畑[2]）

## 参考文献


[1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels", Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 337 — 404

[2] 溝畑 茂，「偏微分方程式論」，岩波書店

[3] G.M. Molchan, "On some problems concerning Brownian motion in Lévy's sense", Theory of Prob. and its Appli. 12 (1967) 682 — 690

[4] L.D. Pitt, "A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter", Arch. Rat. Mech. Analysis, 17 (1971), 367-391.